ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI ĐỨC HUY

TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP
VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI ĐỨC HUY

TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nguyễn Việt Hải

THÁI NGUYÊN - 2019

Danh mục hình

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường đại học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K11B (2017 - 2019) Trường đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 5 năm 2019
Người viết Luận văn

Bùi Đức Huy

Mở đầu

1. Mục đích của đề tài luận văn

Mục đích của đề tài này là:

– Nghiên cứu sâu thêm về tứ giác ngoại tiếp: Các điều kiện và tính chất của tứ giác ngoại tiếp thường ít được trình bày trong các sách hình học ở Việt nam, nếu có cũng chỉ nói đến Định lý Pithot, trong khi tính chất của tứ giác nội tiếp được giới thiệu thường xuyên. Ngoài ra, còn có lớp các tứ giác đặc biệt của tứ giác ngoại tiếp có nhiều ứng dụng trong giải toán. Giới thiệu về tứ giác ngoại tiếp cùng các trường hợp đặc biệt của nó là lý do chọn đề tài của tôi.

– Sau khi trình bày gần 20 điều kiện cần và đủ cùng các tính chất (cũng là các điều kiện cần và đủ) của tứ giác ngoại tiếp, các đặc trưng của tứ giác cánh diều và của tứ giác song tâm chúng tôi muốn khẳng định sự phong phú và sâu sắc của hình học sơ cấp khi chúng ta biết tổng hợp, khai thác các khía cạnh của khái niệm bằng các công cụ sẵn có.

– Bồi dưỡng năng lực dạy các chuyên đề khó ở trường THCS và THPT góp phần đào tạo học sinh học giỏi môn Hình học.

2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Trình bày các điều kiện cần và đủ để một tứ giác lồi là tứ giác ngoại tiếp. Sau đó xét 2 trường hợp đặc biệt của tứ giác ngoại tiếp: Tứ giác cánh diều, tứ giác song tâm và các tính chất của chúng. Phát biểu và chứng minh một số hệ thức liên quan. Nội dung luận văn chia làm 3 chương:

Chương 1. Định lý Pithot và các điều kiện tương đương

Sau khi phát biểu và chứng minh chặt chẽ ba định lý cơ bản của tứ giác ngoại tiếp (tham khảo và bổ sung chi tiết trong [1], [6]) luận văn trình bày các điều kiện cần và đủ nữa về tứ giác ngoại tiếp chia làm các dấu hiệu liên quan đến cạnh, đường chéo, liên quan đến diện tích, liên quan đến các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp,... Chương này bao gồm:

1.1. Ba định lý cơ bản về tứ giác ngoại tiếp

1.2. Các điều kiện về cạnh và đường chéo

1.3. Các điều kiện liên quan đến bốn tam giác

1.4. Đặc trưng về góc và đường tròn.

Chương 2. Tứ giác cánh diều và tứ giác song tâm

Đây là hai trường hợp đặc biệt của tứ giác ngoại tiếp. Với những giả thiết đặc biệt ta thu được các dấu hiệu đặc trưng của tứ giác cánh diều và tứ giác song tâm cùng các tính chất khác. Chương này bao gồm các mục sau:

2.1. Tứ giác cánh diều và các tính chất

2.2. Tứ giác song tâm và các tính chất.

Chương 3. Các vấn đề liên quan

Bên cạnh khái niệm tứ giác ngoại tiếp với các trường hợp đặc biệt của nó có rất nhiều các vấn đề liên quan. Trong chương này ta đề cập đến các khái niệm, tính chất hay được sử dụng trong giải toán, đó là:

3.1. Đoạn thẳng tiếp tuyến và dây cung tiếp xúc

3.2. Tứ giác tiếp xúc

3.3. Tứ giác ngoại tiếp và phép nghịch đảo

Chương 1

Định lý Pithot và các điều kiện tương đương

1.1 Ba định lý cơ bản về tứ giác ngoại tiếp

Ta nhắc lại *tứ giác ngoại tiếp đường tròn là tứ giác lồi mà tất cả các cạnh đều tiếp xúc với một đường tròn* hay *tứ giác ngoại tiếp là tồn tại tồn tại một đường tròn nội tiếp trong tứ giác*. Lưu ý rằng đường tròn nội tiếp đó là duy nhất. Trong toàn bộ luận văn chúng tôi sẽ sử dụng *"tứ giác ngoại tiếp"'* thay cho cách nói "tứ giác ngoại tiếp một đường tròn".

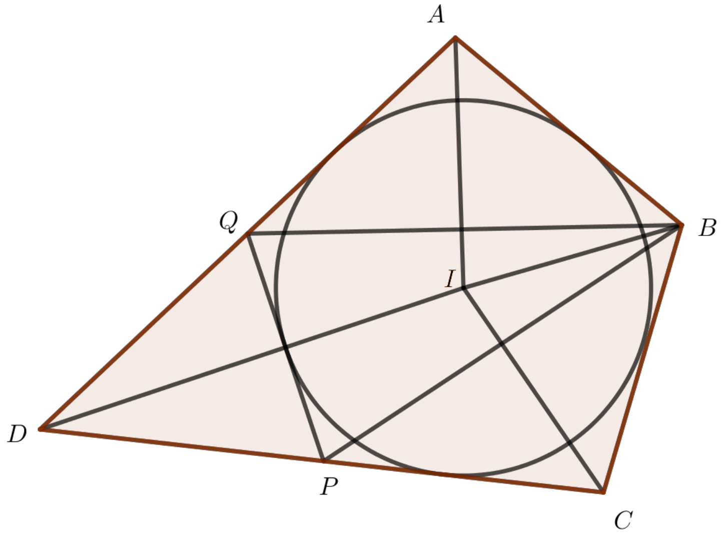
Dễ thấy không phải mọi tứ giác lồi đều là tứ giác ngoại tiếp. Do đó, muốn một tứ giác ngoại tiếp cần phải có thêm một (hoặc một số) điều kiện nào đó, mà ta gọi là "điều kiện cần và đủ để một tứ giác ngoại tiếp". Dấu hiệu nhận biết một tứ giác ngoại tiếp xuất hiện sớm và đóng vai trò quan trọng là Định lý Pithot. Henri Pithot (1695-1771) là một kỹ sư người Pháp đã công bố điều kiện cần và cũng là điều kiện đủ để một tứ giác ngoại tiếp ngay từ năm 1725, phép chứng minh đầu tiên được thực hiện bởi nhà toán học Thụy sĩ Jakob Steiner (1796-1863) vào năm 1846.

Định lý 1.1 (Pithot). *Tứ giác $ABCD$ với các cạnh a, b, c, d ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi $AB + CD = BC + DA$, tức là*

$$a + c = b + d. \tag{1.1}$$

Chứng minh. ([1]), Giả sử $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), các tiếp điểm thứ tự trên các cạnh AB, BC, CD, DA là M, N, P, Q. Suy ra:

$AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP, DP = DQ$. Cộng vế với vế ta có $AB + CD = BC + DA$.



Hình 1.1: Định lý Pithot

Ngược lại, giả sử tứ giác $ABCD$ thỏa mãn $AB + CD = BC + DA$. Không mất tính chất tổng quát ta coi $AB \leq AD$.
Do $AB + CD = BC + DA$ nên $BC \leq DC$. Khi đó tồn tại $Q \in AD$, $P \in DC$ sao cho $AB = AQ$ và $CB = CP$, suy ra $DP = DQ$. Từ đó, các tam giác ABQ, CBP, DPQ là những tam giác cân và các đường cao từ ba đỉnh A, C, D là 3 trung trực của tam giác BPQ, đồng quy tại một điểm I. Ta có I cách đều các cạnh AD, DC, CB, AB của tứ giác. Vậy tồn tại đường tròn tâm I tiếp xúc với các cạnh tứ giác. $\square$

Chú ý. Ta còn có kết quả mạnh hơn Định lý Pithot và cũng là cách chứng minh khác của phần đảo Định lý Pithot: Giả sử $ABCD$ là một tứ giác tùy ý và có đường tròn tiếp xúc với AB, AD, BC đồng thời cắt cạnh DC tại hai điểm. Khi đó $AB + DC \geq AD + BC$. Dấu bằng xảy ra khi $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp.

Thật vậy, ký hiệu như *Hình 1.2* thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x + y + z \geq c + d$.

Ta nhắc lại Định lý phương tích : Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định. Một đường thẳng thay đổi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó $\overline{MA}.\overline{MB} = MO^2 - R^2 = d^2 - R^2$.